Voorbeeldsamenvatting | Inleiding Wiskunde

Economie | Erasmus Universiteit Rotterdam

2022 - 2023

EUEC-372-397 | €0,00

Tentamengericht | Overzichtelijke structuur

Sinds 1994 | Beoordeeld met een 8,2

Slim Academy

Voorwoord

Beste student,

Leuk dat je dit jaar Economie en Bedrijfseconomie gaat studeren! Voor je ligt de samenvatting van het vak Inleiding Wiskunde. Slim Academy heeft de belangrijkste studiestof voor je samengevat. Zo kun jij zo prettig mogelijk studeren. We wensen je alvast succes met studeren en natuurlijk met het behalen van jouw studiepunten!

Nu 2 MAANDEN GRATIS bij een abonnement!
Wil jij de Slim Academy samenvattingen van jouw vakken altijd als eerste in huis hebben zodat jij op tijd kan beginnen met studeren? Gebruik dan de kortingscode BEGINGOED bij het afsluiten van een abonnement en krijg de eerste twee maanden van jouw abonnement helemaal gratis! Ga hiervoor naar www.slimacademy.nl en kies je jaar. Deze code is geldig t/m 30 september 2022.

Werken bij

Slim Academy is altijd op zoek naar gemotiveerde studenten! Lijkt het je leuk om bij ons aan de slag te gaan met het samenvatten en nakijken van samenvattingen? Dan is de rol van Studieheld zeker iets voor jou. Je kunt **werken vanuit huis**, krijgt een **riante vergoeding** en je hebt een studiegerelateerde bijbaan die **goed op je cv** staat. Heb je interesse? Stuur dan jouw motivatie en cv naar klantenservice@slimacademy.nl.

Auteursrechten voorbehouden
Houd er rekening mee dat onze samenvattingen beschermd zijn door de auteurswet. Dat betekent dat het doorverkopen of delen van onze fysieke en/of digitale samenvattingen illegaal is. Als je wilt dat wij samenvattingen kunnen blijven aanbieden, verzoeken wij je jouw eigen exemplaar te kopen. Als je vragen hebt of schendingen van het auteursrecht wilt melden, kun je contact met ons opnemen via klantenservice@slimacademy.nl.

Stay in touch
Wil je verder op de hoogte blijven van de ontwikkelingen bij Slim Academy? Kom in contact via:
www.slimacademy.nl
@SlimAcademy.nl
klantenservice@slimacademy.nl
010 214 32 45

We wensen je veel succes met studeren en bij het halen van jouw tentamens!

Team Slim Academy

P.S. De samenvatting is geschreven naar eigen inzicht van de auteur. Het is en blijft een samenvatting, die als aanvulling op de verplichte lesstof gezien moet worden en geen vervanging is van de verplichte lesstof.

Inhoudsopgave

Informatie over het vak

Inleiding Wiskunde is een vak dat bestaat uit zes cycli. Elke cyclus behandelt een aantal onderwerpen dat bekend wordt verondersteld op het tentamen.

De focus bij dit vak ligt vooral op het leggen van een wiskundige basis voor de rest van je studie. Het zijn dan ook relatief veel onderwerpen van een vrij lage moeilijkheidsgraad. Kenmerkend voor dit vak is wel dat naarmate we verder komen in de cycli, de stof wel iets lastiger wordt, aangezien er in het begin nog veel theorie voorkomt die terug te leiden valt tot stof van de middelbare school. Zulke theorie komt richting het einde van het vak substantieel minder voor.

Het vak Inleiding Wiskunde laat zich kenmerken door het feit dat het gaat om het leggen van een basis voor de rest van je studie. Deze basis wordt dan ook elk jaar getest op een constant niveau. Dit betekent ook dat de tentamens veelal dezelfde opzet hebben. Maak hier gebruik van door veel oude tussentoetsen en tentamens te oefenen, zodat je bekend bent met standaard opgaven.

De tussentoets is niet lang, nadat de laatste stof van cyclus 3 is afgerond. Begin dan ook op tijd met studeren voor de tussentoets, aangezien je dus niet een week de tijd hebt om te studeren! Voor het (her)tentamen geldt dit in minder sterke mate, maar is het nog steeds aan te raden vroeg van tevoren te beginnen met leren! Daarnaast is het aan te raden om goed voor de tussentoets te leren en dus tijdig te beginnen, omdat deze stof niet alleen op de tussentoets, maar ook op het (her)tentamen wordt teruggevraagd.

Overview Tabel

Week (Cyclus)	Literatuur (Sydsaeter et al.)	Hoorcollege
1 & 2 (cyclus 1)	H1.2, H2.1-H2.8, H3.1-H3.6, H4.1-H4.10	Hoorcollege 1 en 2
3 (cyclus 2)	H5.1-H5.4, H5.6, H6.1-H6.7	Hoorcollege 3
4 (cyclus 3)	H6.8-H6.11, H7.1-H7.3, H7.7	Hoorcollege 4

Bron: Slim Academy, 2022.

Wat voor samenvattingen bieden we aan en wanneer kun je ze verwachten?

Voor Economie en Bedrijfseconomie maken wij verschillende typen samenvattingen. Hieronder vind je een overzicht van deze samenvattingen en wanneer je deze kan verwachten deze periode.

Studiehulp	**Wat houd het in?**	**Wanneer?**
Deel 1 / Deel 2	Deze samenvattingen integreren de informatie uit de vereiste literatuur en lezingen.	Deel 1: de 2e week van het blok Deel 2: 2 weken voor het examen
Opdrachten	Het Opdrachtenboekje bevat veel oefenmateriaal om je voor te bereiden op kwantitatieve examens.	2 weken voor het examen

Belangrijk: Wij wilden zo vroeg mogelijk een voorbeeldsamenvatting aanbieden, zodat je een duidelijk beeld kan vormen van hoe onze samenvattingen eruitzien. Dat betekent dat de informatie die je in dit gedeelte ziet over de verplichte hoofdstukken en examens onderhevig kan zijn aan wijzigingen. Wij herzien onze samenvattingen jaarlijks, dus als er veranderingen optreden, zullen wij onze samenvattingen bijwerken.

Succes met studeren!

H1: Cyclus 1 - Basisalgebra en Vergelijkingen

1.1 Rekenregels

Op het tentamen worden enkele rekenregels bekend verondersteld. Omdat hier toch vaak fouten mee worden gemaakt, worden deze hieronder overzichtelijk weergegeven voor zowel breuken als machten.

1.1.1 Breuken

Een breuk is een manier om een deling weer te geven. De **teller** (boven de streep) moet namelijk gedeeld worden door de **noemer** (onder de streep). Breuken vermenigvuldigen doe je door de teller en de noemer van de ene breuk te vermenigvuldigen met respectievelijk de teller en de noemer van de andere breuk. Hieruit volgt de eerste rekenregel:

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Het is mogelijk om voor de teller van de ene breuk de waarde 1 te nemen, evenals voor de noemer van de andere breuk. In bovenstaande rekenregel levert dit op: $a = d = 1$. Hieruit volgt de volgende rekenregel:

$$\frac{c}{b} = c * \frac{1}{b}$$

Breuken kunnen ook gedeeld worden door elkaar. Hiervoor geldt de bekende regel: "Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde." Dit wil zeggen dat je om twee breuken door elkaar te delen de teller en de noemer van een van de twee breuken moet verwisselen en vervolgens de twee breuken met elkaar kan vermenigvuldigen. Hieruit volgt dan ook de derde rekenregel:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Uit deze rekenregel volgt ook:

$$\frac{1}{\frac{1}{b}} = 1 * \frac{b}{1} = b$$

Voorbeeldopgave 1

Bereken hoeveel $\frac{4}{7}$ gedeeld door $\frac{3}{10}$ is.

Dit komt neer op het berekenen van de volgende deling van breuken: $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{10}}$. Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde. $\frac{3}{10}$ is omgekeerd $\frac{10}{3}$, dus $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{10}} = \frac{4}{7} * \frac{10}{3} = \frac{4*10}{7*3} = \frac{40}{21}$.

Twee breuken kunnen alleen bij elkaar worden opgeteld of van elkaar worden afgetrokken, als ze **gelijknamig** zijn. Dat wil zeggen dat de noemer van beide breuken gelijk is. Als je twee breuken hebt waarvan de noemer niet gelijk is, moet je dus vaak eerst bij de ene breuk zowel de teller als de noemer vermenigvuldigen met de noemer van de andere breuk en bij de andere breuk eveneens zowel de teller als de noemer vermenigvuldigen met de noemer van de ene breuk.
Vervolgens zijn de noemers van beide breuken gelijk en kunnen deze bij elkaar worden opgeteld of van elkaar worden afgetrokken. Hieruit volgen twee rekenregels:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{d*a}{d*c} + \frac{c*b}{c*d} = \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{cd} = \frac{ad+bc}{cd}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{d*a}{d*c} - \frac{c*b}{c*d} = \frac{ad}{cd} - \frac{bc}{cd} = \frac{ad-bc}{cd}$$

Als je deze rekenregel omkeert, dan volgt hieruit dat

$$\frac{b+a}{b} = \frac{b}{b} + \frac{a}{b} = 1 + \frac{a}{b}$$

Slimme Tip!
Vaak wordt de hierboven uitgelegde theorie impliciet teruggevraagd op het tentamen. Berekeningen met breuken worden dan vaak foutief uitgevoerd, waardoor je punten misloopt. Let er dan ook op dat geldt:

$$\frac{a}{a+b} \neq 1 + \frac{a}{b}$$

Voorbeeldopgave 2

Bereken de som van $\frac{4}{6}$ en $\frac{5}{8}$.

Dit komt neer op $\frac{4}{6} + \frac{5}{8}$. Deze breuken zijn niet gelijknamig; de noemer van beide breuken is niet gelijk. Om de breuken gelijknamig te maken, moet er gezocht worden naar het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van deze twee breuken. In dit geval is dat 24, omdat $4 * 6 = 24$ en $3 * 8 = 24$. Er geldt dat $\frac{4}{6} = \frac{4*4}{4*6} = \frac{16}{24}$ en $\frac{3*5}{3*8} = \frac{15}{24}$, dus
$\frac{4}{6} + \frac{5}{8} = \frac{16}{24} + \frac{15}{24} = \frac{16+15}{24} = \frac{31}{24}$.

Voorbeeldopgave 3

Vereenvoudig de volgende breuk: $\frac{1}{2-\frac{4}{5}} + \frac{2}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{1-\frac{13}{19}}$.

Eerst moet de noemer van elke afzonderlijke breuk worden uitgewerkt. Hiervoor moeten de beide breuken in de noemer gelijknamig worden gemaakt, zodat ze bij elkaar opgeteld dan wel van elkaar afgetrokken kunnen worden. Vervolgens moet de regel: "Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde" worden toegepast. Hieruit volgt achtereenvolgens dat $\frac{1}{2-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\frac{5*2}{5*1}-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\frac{10}{5}-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\frac{6}{5}} = 1 * \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$,

$\frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{3*1}{3*1}-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{3}{3}-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 2 * \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$ en

$\frac{1}{1-\frac{13}{19}} = \frac{1}{\frac{19*1}{19*1}-\frac{13}{19}} = \frac{1}{\frac{19}{19}-\frac{13}{19}} = \frac{1}{\frac{6}{19}} = 1 * \frac{19}{6} = \frac{19}{6}$. De som is dus gelijk aan $\frac{5}{6} + 3 + \frac{19}{6}$. Om deze breuken bij elkaar op te kunnen tellen moeten ze gelijknamig worden gemaakt: $\frac{5}{6} + \frac{6*3}{6*1} + \frac{19}{6} = \frac{5}{6} + \frac{18}{6} + \frac{19}{6} = \frac{5+18+19}{6} = \frac{42}{6} = 7.$

1.1.2 Machten

Voor het rekenen met machten gelden er, net zoals voor het rekenen met breuken, enkele rekenregels die als aanwezige kennis verondersteld worden op het tentamen. Zo gelden er de volgende rekenregels:

$$a^b * a^c = a^{b+c}$$

$$\left(a^b\right)^c = a^{b*c} = a^{bc}$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

$a^0 = 1$, mits $a \neq 0$, omdat 0^0 niet gedefinieerd is

Slimme Tip!

Er geldt dat:

$$(a+b)^2 = (a+b)*(a+b) = a*a + a*b + b*a + b*b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Let er echter op dat geldt:

$$(a+b)^c \neq a^c + b^c$$

Voorbeeldopgave 4

Schrijf $x^2 * (x^3)^4 * \frac{1}{x^8}$ zo kort mogelijk.

Eerst moet je ervoor zorgen dat het allemaal machten zijn met hetzelfde grondtal, in dit geval x. Er geldt dat $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$, dus $\frac{1}{x^8} = x^{-8}$. Tevens geldt er dat $(a^b)^c = a^{b*c} = a^{bc}$, dus $(x^3)^4 = x^{3*4} = x^{12}$. Dus $x^2 * (x^3)^4 * \frac{1}{x^8} = x^2 * x^{12} * x^{-8}$. Omdat $a^b * a^c = a^{b+c}$, betekent dit dat $x^2 * x^{12} * x^{-8} = x^{2+12+-8} = x^6$.

Voorbeeldopgave 5

Vereenvoudig: $4^0 - (0,4)^{-1} + \frac{3}{2} + 4 * 4^{-1}$.

Eerst moet je ervoor zorgen dat alle machten uitgewerkt worden. Er geldt $a^0 = 1$, mits $a \neq 0$, dus $4^0 = 1$. Er geldt dat $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, dus $(0,4)^{-1} = \frac{1}{0,4^1} = \frac{1}{0,4} = \frac{5}{2}$. Op basis van dezelfde regel geldt dat $4^{-1} = \frac{1}{4^1} = \frac{1}{4}$, dus $4 * 4^{-1} = 4 * \frac{1}{4} = 1$. Dit betekent dat de gevraagde uitdrukking
$4^0 - (0,4)^{-1} + \frac{3}{2} + 4 * 4^{-1}$ vereenvoudigd kan worden tot $1 - \frac{5}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 1$.

Een macht bestaat uit een grondtal en een exponent. Als je 2^3 hebt, dan is 2 het grondtal en 3 de exponent. Tot nu toe hebben we alleen nog maar machten behandeld met exponenten die uit gehele, ofwel integere, getallen bestonden: **integere exponenten**. Maar er bestaan ook machten met **non-integere exponenten**. Dan bestaat de exponent bijvoorbeeld uit een breuk. Ook hiervoor zijn enkele rekenregels. Zo gelden de regels dat:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

$$a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$$

$$\sqrt{a} * \sqrt{b} = \sqrt{a * b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Slimme Tip!
Vaak wordt de hierboven uitgelegde theorie impliciet teruggevraagd op het tentamen. Berekeningen met wortels worden dan vaak foutief uitgevoerd, waardoor je punten misloopt. Let er dan ook op dat geldt:

$$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Voorbeeldopgave 6

Vereenvoudig $64 * 32^{-\frac{3}{5}}$.

Eerst moet je ervoor zorgen dat het allemaal machten zijn met hetzelfde grondtal. In dit geval moet je het inzicht hebben dat de machten te herleiden zijn tot machten met grondtal 2. Zo geldt $64 = 2^6$ en $32 = 2^5$. Dus $64 * 32^{-\frac{3}{5}} = 2^6 * \left(2^5\right)^{-\frac{3}{5}}$. Op basis van de rekenregel dat $\left(a^b\right)^c = a^{b*c}$ geldt dat $\left(2^5\right)^{-\frac{3}{5}} = 2^{5*-\frac{3}{5}} = 2^{-3}$. Dit betekent dan ook dat de gevraagde uitdrukking $64 * 32^{-\frac{3}{5}}$ gelijk is aan $2^6 * 2^{-3} = 2^{6+-3} = 2^3 = 8$ op basis van de rekenregel $a^b * a^c = a^{b+c}$.

Voorbeeldopgave 7

Vereenvoudig $\dfrac{\left(p^a * q^{-\frac{b}{2}}\right)^2}{\left(p^{-\frac{2a}{3}} * q^{\frac{4b}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}}$.

Eerst moet je ervoor zorgen dat het allemaal machten zijn met hetzelfde grondtal. In dit geval is dat al het geval en zijn de grondtallen p en q. Op basis van de rekenregel dat $\left(a^b\right)^c = a^{b*c}$ geldt dat $\left(p^a * q^{-\frac{b}{2}}\right)^2 = p^{2*a} * q^{-\frac{b}{2}*2} = p^{2a} * q^{-b}$ en dat $\left(p^{-\frac{2a}{3}} * q^{\frac{4b}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}} = p^{-\frac{2a}{3}*-\frac{3}{2}} * q^{\frac{4b}{3}*-\frac{3}{2}} = p^a * q^{-2b}$. Dus $\dfrac{\left(p^a * q^{-\frac{b}{2}}\right)^2}{\left(p^{-\frac{2a}{3}} * q^{\frac{4b}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}} = \dfrac{p^{2a} * q^{-b}}{p^a * q^{-2b}} = p^a * q^b$ op basis van de rekenregel $a^b * a^c = a^{b+c}$.

Voorbeeldopgave 8
Vereenvoudig $\frac{8}{x^2-4x} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x-4}$, waarvoor geldt $x \neq 0$ en $x \neq 4$.

Er moet voor gezorgd worden dat de drie breuken gelijknamig zijn, zodat ze bij elkaar kunnen worden opgeteld dan wel worden afgetrokken. Hiervoor geldt dat de noemers gelijk moeten zijn aan elkaar. Hiervoor is het belangrijk om je te realiseren dat $x^2 - 4x = x(x - 4)$. In alle noemers moet dus $x^2 - 4x$ staan. Voor $\frac{2}{x}$ doe je dit door zowel teller als noemer te vermenigvuldigen met $x - 4$, dus $\frac{2}{x} = \frac{(x-4)*2}{(x-4)*x} = \frac{2x-8}{x^2-4x}$. Voor $\frac{2}{x-4}$ doe je dit door zowel teller als noemer te vermenigvuldigen met x, dus $\frac{2}{x-4} = \frac{x*2}{x(x-4)} = \frac{2x}{x^2-4x}$. Hieruit volgt dat $\frac{8}{x^2-4x} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x-4} = \frac{8}{x^2-4x} + \frac{2x-8}{x^2-4x} - \frac{2x}{x^2-4x} = \frac{8+2x-8-2x}{x^2-4x} = \frac{0}{x^2-4x} = 0$.

1.2 Functies
Als gegeven is dat $y = f(x)$, dan geldt dat y de **afhankelijke** variabele is en dat x de **onafhankelijke** variabele is. Bovendien geldt dat alle waarden die toegestaan zijn voor x het **domein** van $f(x)$ genoemd worden en dat alle waarden die y kan aannemen op het gegeven domein het **bereik** van $f(x)$ genoemd worden.

1.2.1 Lineaire functies
Als $y = f(x) = ax + b$ dan is $f(x)$ een **lineaire functie**. Als deze functie grafisch wordt weergegeven dan is het een rechte lijn. In de lineaire functie bepaalt a de helling van de lijn. Als $a > 0$ dan is sprake van een toenemende functie; als $a = 0$ dan is sprake van een constante functie; als $a < 0$ dan is sprake van een afnemende functie. In de functie $f(x)$ is b het startgetal. Dit is de waarde die de functie aanneemt als $x = 0$ en is dan ook de y-waarde van het punt, waarin de functie de y-as snijdt. Voor de nulpunten van een lineaire functie geldt dat je moet zoeken naar het snijpunt van de functie met de x-as, waar geldt dat $y = 0$, ofwel $ax + b = 0$. Hieruit volgt dat $ax = -b$, dus voor het nulpunt geldt:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Voorbeeldopgave 9
Gegeven is de functie $f(x) = 3x + 12$. Bereken de snijpunten met de assen.

Voor het snijpunt met de y-as geldt dat $x = 0$. Om de y-waarde van het snijpunt met de y-as te bepalen, moet je deze waarde van x invullen in de functie $f(x)$. Zo krijg je dan $f(0) = 3 * 0 + 12 = 12$. Hieruit volgt dus dat het snijpunt met de y-as $(0, 12)$ is. Voor het snijpunt met de x-as geldt dat $y = 0$, dus $f(x) = 3x + 12 = 0$. Hieruit volgt dat $3x = -12$, dus $x = \frac{-12}{3} = -4$. Hieruit volgt dus dat het snijpunt met de x-as $(-4, 0)$ is.

1.2.2. Kwadratische functies

Een lineaire functie is echter niet de enige soort functie die er bestaat. Zo bestaan er ook **kwadratische functies** van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$. Voor de nulpunten van een kwadratische functie geldt:

$$x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ of } x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \text{ mits } a \neq 0 \text{ en } b^2 - 4ac \geq 0$$

Voorbeeldopgave 10

Gegeven is de functie $f(x) = 7x^2 + 56x + 105$. Bereken de snijpunten met de assen.

Voor het snijpunt met de y-as geldt wederom dat $x = 0$. Om de y-waarde van het snijpunt met de y-as te bepalen moet je deze waarde van x invullen in de functie $f(x)$. Zo krijg je dan $f(0) = 7 * 0^2 + 56 * 0 + 105 = 105$. Hieruit volgt dus dat het snijpunt met de y-as $(0, 105)$ is. Voor het snijpunt met de x-as geldt dat $y = 0$. Voor de x-waarden geldt dat $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ of dat $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, als de functie van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ is. Er moet dan echter wel gelden dat $b^2 - 4ac \geq 0$ en dat $a \neq 0$. In dit geval geldt dat $a = 7$, $b = 56$ en $c = 105$. Hieruit volgt dat $b^2 - 4ac = 56^2 - 4 * 7 * 105 = 196 \geq 0$ en dat $a = 7 \neq 0$. Er geldt dus inderdaad dat $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ of dat $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Invullen geeft $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-56-\sqrt{196}}{2*7} = -5$ of dat geeft $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-56+\sqrt{196}}{2*7} = -3$. De snijpunten met de x-as zijn dus $(-5, 0)$ en $(-3, 0)$.

1.2.3 Polynomiale functies

De functie $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ met $a_n \neq 0$ is een **polynomiale functie** van graad n. Zojuist hebben we reeds de lineaire en kwadratische functie behandeld. Dit zijn dus polynomiale functies van respectievelijk graad 1 en 2.

Vaak wordt gevraagd om nulpunten te berekenen van een polynomiale functie. Dan moet je dus bepalen voor welke x-waarden geldt $f(x) = 0$. Hierbij is de volgende theorie van groot belang. Als $f(x) = (x - c) * g(x)$ met $f(x)$ een polynomiale functie van graad n en $g(x)$ een polynomiale functie van graad $n - 1$, dan is $(x - c)$ een **factor** van $f(x)$.

Dit is van belang bij het bepalen van de nulpunten van de polynomiale functie $f(x)$ van graad n en de polynomiale functie $g(x)$ van graad $n - 1$, aangezien onder de volgende voorwaarde:

$$f(x) = (x - c) * g(x) = 0$$

voor het nulpunt geldt dat:

$$x = c$$

Dit maakt dus dat de bewering dat $x = c$ een nulpunt is van de polynomiale functie $f(x)$ en de bewering dat $(x - c)$ een factor is van de polynomiale functie $f(x)$, equivalent zijn.

Het belang en het gebruik van deze equivalentie laten zich het beste tonen door middel van een voorbeeld. Stel je wilt de snijpunten met de x-as van de functie $f(x)$ weten, als $f(x) = x^2 + 10x + 24$. Dat wil zeggen dat $f(x)$ een polynomiale functie is van graad 2, aangezien dit de hoogste macht van x is.

Nu moet er gezocht worden naar de waardes van c en $g(x)$ in de vergelijking $f(x) = (x - c) * g(x)$ met $g(x)$ een polynomiale functie van graad $n - 1 = 2 - 1 = 1$. Dit betekent dat $g(x)$ een lineaire functie is.

Voor de kwadratische functie bestaat hiervoor een speciaal trucje. Als:

$$f(x) = x^2 + mx + n$$

dan geldt dat:

$$f(x) = (x + q)(x + r)$$

waarbij:

$$q + r = m$$

$$q * r = n$$

In dit voorbeeld moet je dus op zoek gaan naar twee getallen die met elkaar vermenigvuldigd 24 zijn en bij elkaar opgeteld 10. Dit zijn de getallen 4 en 6. De polynomiale functie $f(x)$ kan dus geschreven worden als $x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6) = (x - c) * g(x)$. Dit betekent in dit geval dat ofwel $(x + 4)$ als factor en $(x + 6)$ als $g(x)$ kan worden genomen en andersom ook, omdat beiden voldoen aan de vorm van $(x - c)$ en aan het vereiste dat $g(x)$ een lineaire functie (ofwel polynomiale functie van graad 1) moet zijn. In dit geval geldt dus dat $(x - c) = (x + 4)$ of $(x - c) = (x + 6)$, dus voor de **nulpunten** geldt: $x = -4$ of $x = -6$.

Voorbeeldopgave 11

Vind de nulpunten van de functie $f(x) = 2x^2 - 36x + 160$.

Er wordt in dit geval gevraagd om de vergelijking $2x^2 - 36x + 160 = 0$ op te lossen. Dit kan met behulp van de abc-formule, maar dit kan ook aan de hand van de hierboven uitgelegde theorie. Hiervoor moeten we eerst de vergelijking terugbrengen tot de vorm $x^2 + mx + n = 0$. Hiervoor delen we beide kanten door 2, waaruit vervolgens volgt dat $x^2 - 18x + 80 = 0$. Voor het bepalen van de nulpunten van de functie $f(x)$, een polynomiale functie van graad 2, geldt dat we bovenstaande theorie moeten toepassen, namelijk dat als $f(x) = x^2 + mx + n$ dan $f(x) = (x + q)(x + r)$ met als voorwaarden dat $q + r = m$ en $q * r = n$. We moeten dus twee getallen vinden die bij elkaar opgeteld gelijk zijn aan -18 en vermenigvuldigd met elkaar 80 zijn. Dit zijn de getallen -8 en -10. Hieruit volgt $f(x) = (x - 8)(x - 10)$, wat betekent dat voor de nulpunten geldt: $x = 8$ en $x = 10$.

Slimme Tip!
Probeer altijd eerst te kijken of bovenstaande methode werkt om de nulpunten van een polynomiale functie te bepalen, aangezien dit veel sneller gaat dan de abc-formule!

Voorbeeldopgave 12

Vind de nulpunten van de functie $f(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$.

Er wordt in dit geval gevraagd om de vergelijking $x^3 + 8x^2 + 15x = 0$ op te lossen. Eerst moet gezocht worden naar een factor waarvoor geldt $f(x) = (x - c) * g(x)$, waarbij $f(x)$ in dit geval een polynomiale functie van graad 3 is en dientengevolge $g(x)$ een polynomiale functie van graad 2 is. Door te ontbinden in factoren valt te vinden dat $f(x) = x\left(x^2 + 8x + 15\right) = (x - 0)\left(x^2 + 8x + 15\right) = 0$. Dit betekent dus dat $x = 0$ sowieso een nulpunt is van de functie $f(x)$. Voor de ontstane functie $g(x) = x^2 + 8x + 15$ geldt dat deze gelijk moet zijn aan 0, omdat $f(x) = (x - 0)\left(x^2 + 8x + 15\right) = 0$ van de vorm $A * B = 0$ is, wat betekent dat $A = 0$ of $B = 0$. We hebben al gezien dat geldt dat $x = 0$ als $A = x - 0 = 0$. Voor $B = 0$ geldt $x^2 + 8x + 15 = 0$. Dit is van de vorm $x^2 + mx + n = 0$. Voor het bepalen van de nulpunten van de functie $g(x)$, een polynomiale functie van graad 2, geldt dat we bovenstaande theorie moeten toepassen, namelijk dat als $g(x) = x^2 + mx + n$ dan $g(x) = (x + q)(x + r)$ met als voorwaarden dat $q + r = m$ en $q * r = n$. We moeten dus twee getallen vinden die bij elkaar opgeteld gelijk zijn aan 8 en vermenigvuldigd met elkaar 15 zijn. Dit zijn de getallen 3 en 5. Hieruit volgt $g(x) = (x + 3)(x + 5)$, wat betekent dat nulpunten van $g(x)$ zijn: $x = -3$ en $x = -5$. Dit betekent dat de nulpunten van de functie $f(x)$ zijn: $x = 0$, $x = -3$ en $x = -5$.

1.2.4 Polynomiale divisie

Polynomiale divisie is de methode om twee polynomiale functies door elkaar te delen, wanneer de ene polynoom van een hogere graad is dan de andere polynoom. De methode werkt als volgt:

- Eerst moet gekeken worden hoe de hoogste macht van de hogere polynoom weggewerkt kan worden. Dit kan door de lagere polynoom met een bepaalde term te vermenigvuldigen. Uit deze vermenigvuldiging moet in ieder geval dezelfde term komen als de term die moet worden weggewerkt, in dit geval dus de hoogste macht. Bekijk het volgende voorbeeld: als de hoogste macht in de polynoom van de teller $3x^4$ is en de polynoom van de noemer $x^2 - 8x$ is, dan moet je $x^2 - 8x$ met $3x^2$ vermenigvuldigen om $3x^4$ weg te werken. Dan krijg je $3x^2 * \left(x^2 - 8x\right) = 3x^4 - 24x^3$. Vervolgens trek je dit van de polynoom van de teller af en "verdwijnt" $3x^4$.
- Nu schrijf je de term waarmee is vermenigvuldigd, in dit geval $3x^2$ achter het = teken van de deling;
- Nu ontstaat er een nieuwe hoogste macht in de teller die lager is dan de vorige keer. Deze wordt op dezelfde manier weggewerkt als hiervoor is omschreven. Je blijft ook telkens de term waarmee je vermenigvuldigd hebt schrijven achter het = teken van de deling.
- Dit wordt herhaald totdat er een polynoom in de teller is dat een lagere graad heeft dan de polynoom met de, in eerste instantie, laagste graad. Deze polynoom kan niet meer gedeeld worden door de polynoom met de, in eerste instantie, laagste graad, dus is dit de **restterm**.
- Achter het = teken staat nu bijna het antwoord van de deling. Deze moet alleen nog aangevuld worden met de restterm, namelijk: $\frac{restterm}{polynoom\ van\ lagere\ graad}$.

Deze methode van polynomiale divisie is dus equivalent aan de methode van de staartdeling. De theorie laat zich het beste uitleggen aan de hand van een voorbeeld. Stel je wilt de volgende deling uitrekenen:

$$\frac{3x^4-16x^3-58x^2-48x}{x^2-8x}$$

Dan ga je als volgt te werk. Eerst wil je $3x^4$ wegkrijgen. Hiervoor moet je $x^2 - 8x$ vermenigvuldigen met $3x^2$. Hieruit volgt $3x^2 * \left(x^2 - 8x\right) = 3x^4 - 24x^3$. Vervolgens trek je $3x^4 - 24x^3$ af van $3x^4 - 16x^3 - 58x^2 - 48x$, waardoor je $8x^3 - 58x^2 - 48x$ overhoudt. Nu wil je $8x^3$ wegkrijgen. Hiervoor moet je $x^2 - 8x$ vermenigvuldigen met $8x$. Hieruit volgt $8x * \left(x^2 - 8x\right) = 8x^3 - 64x^2$. Vervolgens trek je $8x^3 - 64x^2$ af van $8x^3 - 58x^2 - 48x$, waardoor je $6x^2 - 48x$ overhoudt. Nu wil je $6x^2$ wegkrijgen. Hiervoor moet je $x^2 - 8x$ vermenigvuldigen met 6. Hieruit volgt $6 * \left(x^2 - 8x\right) = 6x^2 - 48x$. Vervolgens trek je $6x^2 - 48x$ af van $6x^2 - 48x$, waardoor je 0 overhoudt. Het antwoord is dus:

$$\frac{3x^4-16x^3-58x^2-48x}{x^2-8x} = 3x^2 + 8x + 6$$

Als dit weergegeven wordt als een staartdeling krijg je:

$$\begin{array}{llr}
x^2 - 8x \ / & 3x^4 - 16x^3 - 58x^2 - 48x \ \backslash = & 3x^2 + 8x + 6 \\
\underline{\qquad\quad} & 3x^4 - 24x^3 & \underline{\qquad\qquad - (3x^2)} \\
 & \quad 8x^3 - 58x^2 - 48x & \\
 & \quad 8x^3 - 64x^2 & \underline{\qquad\qquad - (8x)} \\
 & \qquad 6x^2 - 48x & \\
 & \qquad 6x^2 - 48x & \underline{\qquad\qquad - (6)} \\
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Voorbeeldopgave 13
Voer de volgende deling uit met behulp van een staartdeling:

$$\frac{x^5-2x^4+3x+7}{x^2+1}$$

Eerst wil je x^5 wegkrijgen. Hiervoor moet je $x^2 + 1$ vermenigvuldigen met x^3. Hieruit volgt $x^3 * \left(x^2 + 1\right) = x^5 + x^3$. Vervolgens trek je $x^5 + x^3$ af van $x^5 - 2x^4 + 3x + 7$, waardoor je $- 2x^4 - x^3 + 3x + 7$ overhoudt. Nu wil je $- 2x^4$ wegkrijgen. Hiervoor moet je $x^2 + 1$ vermenigvuldigen met $- 2x^2$. Hieruit volgt $- 2x^2 * \left(x^2 + 1\right) = - 2x^4 - 2x^2$. Vervolgens trek je $- 2x^4 - 2x^2$ af van $- 2x^4 - x^3 + 3x + 7$, waardoor je $- x^3 + 2x^2 + 3x + 7$ overhoudt. Nu wil je $- x^3$ wegkrijgen. Hiervoor moet je $x^2 + 1$ vermenigvuldigen met $- x$. Hieruit volgt $- x * \left(x^2 + 1\right) = - x^3 - x$. Vervolgens trek je $- x^3 - x$ af van $- x^3 + 2x^2 + 3x + 7$, waardoor je $2x^2 + 4x + 7$ overhoudt. Nu wil je $2x^2$ wegkrijgen.

Hiervoor moet je $x^2 + 1$ vermenigvuldigen met 2. Hieruit volgt $2 * \left(x^2 + 1\right) = 2x^2 + 2$. Vervolgens trek je $2x^2 + 2$ af van $2x^2 + 4x + 7$, waardoor je $4x + 5$ overhoudt. Dit is de restterm. Het antwoord is dus: $x^3 - 2x^2 - x + 2 + \frac{4x+5}{x^2+1}$.

De uitgewerkte staartdeling ziet er als volgt uit:

$x^2 + 1$ / $x^5 - 2x^4 \qquad + 3x + 7$ \ $= x^3 - 2x^2 - x + 2$

$x^5 \qquad + x^3 \qquad$ - (x^3)

$- 2x^4 \quad - x^3 \qquad + 3x \quad + 7$

$- 2x^4 \qquad - 2x^2 \qquad$ - $(- 2x^2)$

$- x^3 \quad + 2x^2 \quad + 3x \quad + 7$

$- x^3 \qquad - x \qquad$ - $(- x)$

$2x^2 \quad + 4x \quad + 7$

$2x^2 \qquad + 2$ - (2)

$4x + 5$

1.2.5 Niet-lineaire vergelijkingen

Er zijn verschillende soorten vergelijkingen die niet lineair zijn. Eerder hebben we al gezien hoe we een polynomiale vergelijking kunnen oplossen. Er bestaan echter nog meer soorten vergelijkingen dan de lineaire en polynomiale vergelijking.

Als eerste behandelen we de vergelijking waarin een uitdrukking onder de wortel staat en waarin de wortel gelijk wordt gesteld aan een getal. Dit heeft vaak de volgende vorm:

$$\sqrt{A} = b \text{ met } b \geq 0$$

In deze vergelijking is de wortel reeds geïsoleerd. Als dit niet het geval is, dan moet je dit eerst doen om vervolgens tot een vergelijking te komen van de hierboven getoonde vorm. Om deze vergelijking dan op te lossen, geldt dat je eerst moet kwadrateren:

$$A = b^2$$

Vervolgens heb je een vergelijking die simpel op te lossen is.

Slimme Tip!
Een veelgemaakte fout is dat je op het tentamen zonder na te denken gaat kwadrateren als je een vergelijking van de vorm $\sqrt{A} = b$ ziet. Let er echter op dat $b \geq 0$! Een vergelijking, waarvoor geldt $b < 0$, bijvoorbeeld $\sqrt{3x} = -2$ heeft dus geen oplossing!

Voorbeeldopgave 14

Los de vergelijking $\sqrt{x^4 - 12} - 4 = -2$ exact op.

De vergelijking is nog niet van de vorm $\sqrt{A} = b$. Eerst moet de wortel nog geïsoleerd worden. Dit doen we door aan beide kanten 4 op te tellen. Dit levert op: $\sqrt{x^4 - 12} = 2$. Dit is van de vorm
$\sqrt{A} = b$ met $b \geq 0$. Nu moeten we kwadrateren om de wortel weg te werken. Hieruit volgt dat $x^4 - 12 = 4$. Om de macht te isoleren tellen we vervolgens aan beide kanten 12 op. Dit levert op dat $x^4 = 16$. Nu moeten we aan beide kanten de vierdemachtswortel nemen, dus $x = 2$ of $x = \ - 2$.

Een andere niet-polynomiale vergelijking is de vergelijking met een breuk. Een vergelijking met een breuk moet altijd worden teruggebracht tot de volgende vorm:

$$\frac{A}{B} = 0 \text{ met } B \neq 0$$

Om deze vergelijking op te lossen geldt dat je een oplossing moet vinden voor:

$$A = 0 \text{ en } B \neq 0$$

Voorbeeldopgave 15

Los de volgende vergelijking op: $\frac{2x^2-8}{(x+1)(x-2)} = 0$.

De vergelijking is al van de vorm $\frac{A}{B} = 0$. Dat wil zeggen dat de oplossing is $A = 0$ als $B \neq 0$. Eerst moeten we dus de vergelijking oplossen $2x^2 - 8 = 0$. Als we aan beide kanten 8 optellen, levert dit op $2x^2 = 8$. Vervolgens geeft delen door 2 aan beide kanten $x^2 = 4$, wat na worteltrekken leidt tot $x = 2$ of $x = \ - 2$. Echter mag de noemer niet gelijk aan 0 zijn. Dit betekent dat we de vergelijking $(x + 1)(x - 2) \neq 0$ moeten oplossen. Hieruit volgt $x + 1 \neq 0$ of $x - 2 \neq 0$, wat betekent dat $x \neq - 1$ en $x \neq 2$. Het antwoord van de vergelijking is dus $x =- 2$, omdat $x = 2$ geen geldige oplossing is, aangezien de breuk dan niet gedefinieerd is.

Voorbeeldopgave 16

Los de volgende vergelijking op: $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+5} = \frac{4}{x^2+3x-10}$.

De vergelijking is nog niet van de vorm $\frac{A}{B} = 0$. Dit betekent dat we de vergelijking eerst nog in deze vorm moeten schrijven. Hiervoor trekken we eerst aan beide kanten $\frac{4}{x^2+3x-10}$ af. Dat levert op: $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+5} - \frac{4}{x^2+3x-10} = 0$. Nu moeten we de drie breuken als een breuk gaan schrijven. Hiervoor moeten ze echter wel gelijknamig zijn, zodat we ze kunnen optellen en aftrekken. Belangrijk hierbij is om te zien $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$. Dit kan je doen door **ontbinden van factoren**, waarbij je dus zoekt naar twee getallen die bij elkaar opgeteld, in dit geval, 3 zijn en met elkaar vermenigvuldigd $- 10$. In dit geval zijn dat de getallen 5 en $- 2$. Hieruit volgt de vergelijking $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+5} - \frac{4}{(x+5)(x-2)} = 0$. De teller en noemer van de eerste en tweede breuk kunnen we vervolgens vermenigvuldigen met respectievelijk $x + 5$ en $x - 2$. Dit levert op dat

$$\frac{1*(x+5)}{(x-2)(x+5)} + \frac{3*(x-2)}{(x-2)(x+5)} - \frac{4}{(x-2)(x+5)} = \frac{x+5}{(x-2)(x+5)} + \frac{3x-6}{(x-2)(x+5)} - \frac{4}{(x-2)(x+5)} = \frac{x+5+3x-6-4}{(x-2)(x+5)} = 0.$$

Dit levert de vergelijking $\frac{4x-5}{(x-2)(x+5)} = 0$ op. De vergelijking is nu wel van de vorm $\frac{A}{B} = 0$. Dat wil zeggen dat de oplossing is $A = 0$ als $B \neq 0$. Eerst moeten we dus de vergelijking oplossen $4x - 5 = 0$. Als we aan beide kanten 5 optellen, levert dit op $4x = 5$. Vervolgens delen door 4 aan beide kanten geeft $x = \frac{5}{4}$. Echter, de noemer mag niet gelijk aan 0 zijn. Dit betekent dat we de vergelijking $(x - 2)(x + 5) \neq 0$ moeten oplossen. Hieruit volgt $x - 2 \neq 0$ of $x + 5 \neq 0$, wat betekent dat $x \neq - 2$ en $x \neq - 5$. Het antwoord van de vergelijking is dus $x = \frac{5}{4}$.

Slimme Tip!
Als je een vergelijking moet oplossen, waarin meerdere breuken staan die niet gelijknamig zijn, is het vaak mogelijk om de ene breuk te vermenigvuldigen met de noemer van andere breuk, zodat ze alsnog gelijknamig worden. Het ontbinden in factoren van een kwadratische uitdrukking kan hier bovendien bij helpen.

Tot slot kan je ook een vergelijking hebben van de vorm:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ met } B \neq 0 \text{ en } D \neq 0$$

waarvoor op basis van **kruislings vermenigvuldigen** geldt:

$$A * D = B * C$$

Voorbeeldopgave 17

Los de volgende vergelijking op: $\frac{3x}{2x^2} = \frac{1-\frac{18}{x^2}}{x-4}$.

De vergelijking is al van de vorm $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. Dat wil zeggen dat de oplossing is $AD = BC$ als $B \neq 0$ en $D \neq 0$. Eerst moeten we dus kruislings vermenigvuldigen. Dat levert op $3x(x - 4) = 2x^2(1 - \frac{18}{x^2})$. Haakjes wegwerken geeft $3x^2 - 12x = 2x^2 - 36$. Om te zorgen dat we een polynoom van graad 2 krijgen die gelijk is aan 0 doen we aan beide kanten $2x^2$ aftrekken en 36 optellen. Dit geeft dan $x^2 - 12x + 36 = 0$. Nu moeten we voor ontbinden in factoren op zoek gaan naar twee getallen die bij elkaar opgeteld -12 zijn en met elkaar vermenigvuldigd 36. Dit is tweemaal het getal -6. Dit levert op $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)(x - 6) = 0$. Dit betekent dat $x - 6 = 0$, dus $x = 6$. Echter, B en D mogen geen nul zijn. Daarom lossen we de vergelijkingen $2x^2 \neq 0$ en $x - 4 \neq 0$ op, wat $x \neq 0$ en $x \neq 4$ geeft. Dit geeft als oplossing voor de vergelijking $x = 6$.

Een **exponentiële functie** is van de vorm:

$$f(x) = a^x$$

Wanneer $0 < a < 1$, dan is $f(x)$ een afnemende functie. Wanneer $a > 1$, dan is $f(x)$ een toenemende functie. Voor de **natuurlijk exponentiële functie** geldt dat $a = e$, dus:

$$f(x) = e^x$$

waarbij e het getal van Euler is, waarvoor geldt $e \approx 2,72$.

De **natuurlijk logaritmische functie** is de inverse van de natuurlijk exponentiële functie. Inverse functies worden in cyclus 2 uitvoerig besproken. Voor nu is het voldoende om te weten dat de natuurlijk logaritmische functie de inverse is van de natuurlijk exponentiële functie en dat de natuurlijk logaritmische functie de volgende vorm heeft:

$$f(x) = ln\,(x) \text{ als } x > 0$$

Voor de natuurlijk logaritmische functie $f(x)$ gelden een aantal bijzonderheden, zoals:

$$f(1) = ln\,(1) = 0 \text{ omdat } e^0 = 1$$

$$f(e) = ln\,(e) = 1 \text{ omdat } e^1 = e$$

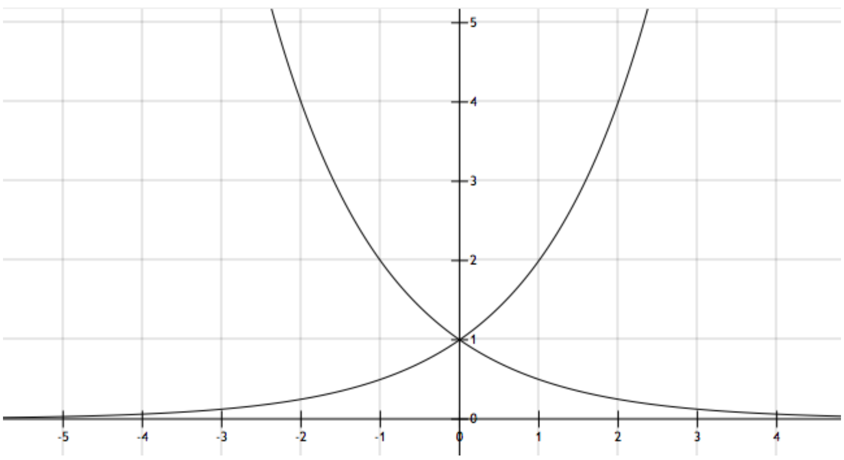
Er gelden enkele rekenregels voor functies met het natuurlijk logaritme:

$$ln\,(a * b) = ln\,(a) + ln\,(b)$$

$$ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln\,(a) - ln\,(b)$$

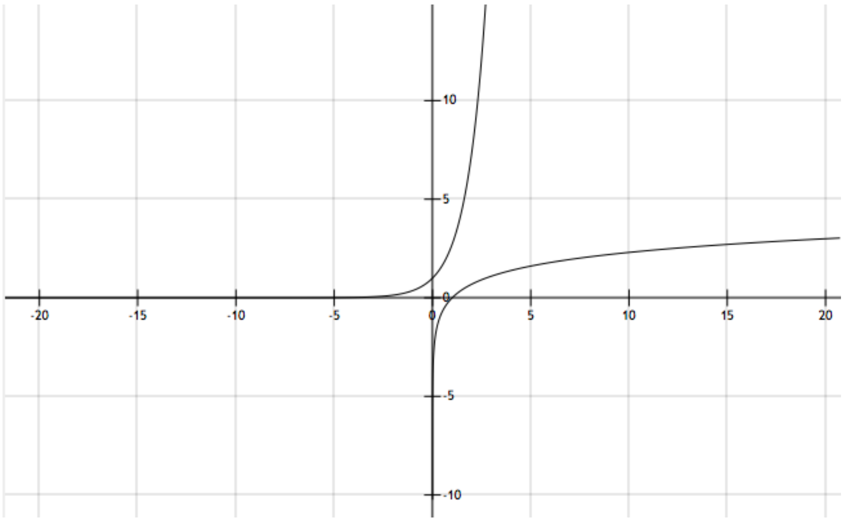
$$ln\left(x^a\right) = a * ln\,(x)$$

Bij het natuurlijk logaritme is e het grondtal van het logaritme. Maar er bestaan ook logaritmes met een ander grondtal dan e. Zo kan het grondtal ook bijvoorbeeld 2 zijn.



Figuur: Exponentiële functies voor $f(x) = 2^x$ **en** $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Bron: SlimAcademy



Figuur: De natuurlijk exponentiële functie $f(x) = e^x$ en de natuurlijk logaritmische functie $g(x) = ln(x)$
Bron: SlimAcademy

Tot nu toe hebben we alleen maar enkele basisconcepten en rekenregels over (natuurlijk) exponentiële functies en (natuurlijk) logaritmische functies behandeld. Het belangrijkst is echter om vergelijkingen met dergelijke functies op te kunnen lossen.

Zo geldt dat als:

$$\frac{log(x)}{log(g)} = a$$

dat:

$$x = g^a$$

Voor het natuurlijk logaritme geldt in het bijzonder dat als:

$$ln\,(x) = a$$

dat:

$$x = e^a$$

Voor vergelijkingen met exponentiële functies erin geldt, als:

$$g^x = a$$

dat:

$$x = \frac{log(a)}{log(g)}$$

Het is belangrijk om op te merken dat het logaritme van x met als grondtal g hetzelfde is als $\frac{log(x)}{log(g)}$. Omdat op het tentamen slechts een simpele rekenmachines mag worden gebruikt, gebruiken we in deze samenvatting de laatste notering, aangezien de eerste notering op een simpele rekenmachine niet mogelijk is.

Daarnaast geldt nog een andere rekenregel voor het oplossen van vergelijkingen met machten, als:

$$g^a = g^b$$

dan:

$$a = b$$

Voorbeeldopgave 18

Los de volgende vergelijking op: $\left(\frac{1}{9}\right)^x * 9^{3x} = 27.$

Eerst moeten we de vergelijking naar de vorm $g^x = a$ krijgen. Dit kunnen we doen door gebruik te maken van de rekenregels, zoals we deze eerder hebben gezien in het onderwerp over machten. Volgens de rekenregel $\frac{1}{g^x} = g^{-x}$ geldt dat $\frac{1}{9} = 9^{-1}$. Volgens de rekenregel $\left(g^a\right)^b = g^{a*b}$ geldt tevens dat $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \left(9^{-1}\right)^x = 9^{-1*x} = 9^{-x}$. Volgens de rekenregel $g^a * g^b = g^{a+b}$ geldt dat $\left(\frac{1}{9}\right)^x * 9^{3x} = 9^{-x} * 9^{3x} = 9^{-x+3x} = 9^{2x}$. Nu hebben we een functie van de vorm $g^x = a$. Dit kan op twee manieren worden opgelost. De eerste manier is met behulp van het logaritme, waaruit volgt dat $x = a$, ofwel in dit geval: $2x = \frac{log(27)}{log(9)} = \frac{3}{2}$, waaruit volgt $x = \frac{3}{4}$. De tweede manier is het op een andere manier schrijven van 9^{2x} en 27 zodat ze hetzelfde grondgetal hebben. Dan zou gelden $9^{2x} = \left(3^2\right)^{2x} = 3^{2*2x} = 3^{4x}$ en $27 = 3^3$. Dit zou de volgende vergelijking opleveren: $3^{4x} = 3^3$, wat zou betekenen dat $4x = 3$, ofwel $x = \frac{3}{4}$.

Voorbeeldopgave 19

Los de volgende vergelijking op: $ln\left(7x^2\right) + ln\left(\frac{1}{x}\right) = 5.$

Eerst moeten we de vergelijking naar de vorm $ln(x) = a$ krijgen, zodat geldt $x = e^a$. Dit kunnen we doen door gebruik te maken van de rekenregels voor logaritmen. Volgens de rekenregel $ln(a) + ln(b) = ln(ab)$ geldt dat $\ln ln\left(7x^2\right) + ln\left(\frac{1}{x}\right) = ln\left(7x^2 * \frac{1}{x}\right) = ln(7x)$. Hieruit volgt $ln(7x) = 5$, wat betekent dat $7x = e^5$, ofwel $x = \frac{e^5}{7}$.

Slimme Tip!
Probeer ervoor te zorgen dat je van een aantal “standaard” getallen weet hoe je die ook kan schrijven. Zo moet je bijvoorbeeld weten dat je 27 kan schrijven als 3^3 en dat je 32 ook kan schrijven als 2^5. Sommen waarbij dit van belang is, komen vaak voor op de tussentoets en het (her)tentamen!

1.3 Ongelijkheden

Als sprake is van een **ongelijkheid**, dienen er een aantal stappen doorlopen te worden om de ongelijkheid op te kunnen lossen:

- Zorg ervoor dat aan één kant van het ongelijkheidsteken er 0 komt te staan. Dit vereenvoudigt namelijk het oplossen van de ongelijkheid. Let erop dat als je moet vermenigvuldigen of delen door een negatief getal, het ongelijkheidsteken "omklapt", dat wil zeggen dat het $<$ teken verandert in het $>$ teken en vice versa;
- Daarna zorg je ervoor dat aan de andere kant van het ongelijkheidsteken (waar dus geen 0 staat) er alleen nog maar vermenigvuldigingen en/of delingen staan. Sommen en verschillen kunnen niet, want dan is een complexe opgave niet op te lossen. Voor eenvoudigere ongelijkheden is het wel mogelijk om te werken met vergelijkingen waar geen vermenigvuldigingen en/of delingen in staan, maar zulke eenvoudige sommen zullen niet gevraagd worden op de tussentoets dan wel het (her)tentamen. Voer dus altijd deze stap uit binnen deze cursus;
- Aansluitend maak je een tekenschema, waarin je van de afzonderlijke termen van het product (vermenigvuldiging) dan wel het quotiënt (deling) aangeeft of deze positief $(+)$, nul (0) of negatief $(-)$ zijn. In de onderste kolom schrijf je dan de gehele term aan de linkerkant van de vergelijking op en geef je aan of deze positief $(+)$, nul (0) of negatief $(-)$ zijn. Dit doe je door te kijken naar de verschillende termen van het product of quotiënt. Hierbij geldt de volgende regel: "Plus maal plus is plus, min maal plus is min en min maal min is plus." Uiteraard is het totaal 0 als een van de termen 0 is, behalve als de noemer van een quotiënt 0 is, dan is het totaal niet gedefinieerd.

Voorbeeldopgave 20

Los de volgende ongelijkheid op: $x^2 - 9x + 32 \geq 12$.

Eerst willen we aan een kant van het ongelijkheidsteken 0 krijgen. Dit doen we in dit geval door aan beide kanten van het ongelijkheidsteken 12 af te trekken. Dit levert op: $x^2 - 9x + 20 \geq 0$. Nu moeten we ervoor zorgen dat er alleen nog maar vermenigvuldigingen en/of delingen staan aan de linkerkant van het ongelijkheidsteken. Dit is mogelijk door ontbinden in factoren. We moeten dus op zoek naar twee getallen die bij elkaar opgeteld -9 en met elkaar vermenigvuldigd 20 zijn. Dat zijn de getallen -4 en -5. Dit geeft $x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5)$, dus $(x - 4)(x - 5) \geq 0$. Aan de hand hiervan gaan we nu een tekenschema maken:

$$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$$
$$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$$

x		4		5	
$x - 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 5$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x - 4)(x - 5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

De vergelijking $x^2 - 9x + 32 \geq 12$ is dus kloppend als de vergelijking $(x - 4)(x - 5) \geq 0$ ook kloppend is. Dit is het geval als $x \leq 4$ of als $x \geq 5$.

Voorbeeldopgave 21

Los de volgende ongelijkheid op: $\frac{2x-1}{x^2-1} \geq \frac{1}{x+1}$.

Eerst willen we aan een kant van het ongelijkheidsteken 0 krijgen. Dit doen we in dit geval door aan beide kanten van het ongelijkheidsteken $\frac{1}{x+1}$ af te trekken. Dit levert op:
$\frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} \geq 0$. Nu moeten we ervoor zorgen dat er alleen nog maar vermenigvuldigingen en/of delingen staan aan de linkerkant van het ongelijkheidsteken. Dit is mogelijk door de breuken van elkaar af te trekken. Dan moeten de breuken echter wel eerst gelijknamig gemaakt worden. Dit is mogelijk door zowel de teller als de noemer van de breuk $\frac{1}{x+1}$ te vermenigvuldigen met $x - 1$, zodat beide breuken als $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$ als noemer hebben: $\frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{1*(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2-1} \geq 0$.

Door nu de breuken van elkaar af te halen, krijgen we:
$\frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{2x-1-x--1}{x^2-1} = \frac{x}{x^2-1} \geq 0$. Aan de hand hiervan gaan we nu een tekenschema maken:

$$x = 0$$
$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = 1 \text{ of } x = -1$$

x		-1		0		1	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x}{x^2-1}$	$-$	N.D.	$+$	0	$-$	N.D.	$+$

De vergelijking $\frac{2x-1}{x^2-1} \geq \frac{1}{x+1}$ is dus kloppend als de vergelijking $\frac{x}{x^2-1} \geq 0$ ook kloppend is. Dit is het geval als $-1 < x \leq 0$ of als $x > 1$.

Slimme Tip!
Zorg dat je goed weet hoe je sommen over ongelijkheden moet oplossen! Vaak komt er een vraag over op het (her)tentamen!

1.4 Notaties en theoretische begrippen

We hebben reeds veel stof behandeld die vrij simpel is en dan ook niet letterlijk op het tentamen zal worden teruggevraagd, maar waarvan het wel belangrijk is om te weten hoe je bepaalde vergelijkingen moet oplossen, omdat dit als aanwezige kennis wordt verondersteld bij het maken van complexere sommen. De theorie die we nu gaan bespreken past goed in dit rijtje thuis. Notaties zijn namelijk erg belangrijk voor het begrijpen van wat de bedoeling van een som is. Er zal echter niet snel gevraagd worden naar een bepaald notatieteken.

Notatie	Naam	Interval *x*
(a, b)	Open interval	$a < x < b$
$[a, b]$	Gesloten interval	$a \leq x \leq b$
$(a, b]$	Half-open interval	$a < x \leq b$
$[a, b)$	Half-open interval	$a \leq x < b$

Figuur: Intervalnotatie
Bron: SlimAcademy

Er bestaan ook intervallen die tot oneindig gaan, daarvoor geldt:

(a, ∞): alle x zodanig dat $x > a$

$(-\infty, b)$: alle x zodanig dat $x < b$

Natuurlijke getallen zijn de getallen 1, 2, 3, enzovoorts. Dit worden ook wel positieve **integere getallen** genoemd. Er kan ook een onderscheid worden gemaakt tussen oneven getallen, zoals 1 , 3, 5, enzovoorts en even getallen, zoals 2, 4, 6, enzovoorts. Er bestaan ook negatieve integere getallen, zoals -1, -2, -3, enzovoorts. **Rationele getallen** zijn alle getallen die geschreven kunnen worden in de vorm $\frac{a}{b}$, waarbij a en b integere getallen zijn. **Irrationele getallen** zijn getallen, zoals $\sqrt{5}$. Tot slot kan een getal weergegeven worden met **decimalen**, bijvoorbeeld 7, 63, of met het **base 10** systeem, bijvoorbeeld $8,8 * 10^3$.Daarnaast bestaan er ook nog het implicatieteken en het equivalentieteken. Het **implicatieteken** → betekent “als … dan …”.

Het **equivalentieteken** ↔ betekent “als en alleen als … dan …”. Als $A \rightarrow B$, dan is A een voldoende voorwaarde voor B, maar is B een noodzakelijke voorwaarde voor A. Dus dit is juist:

$$x > 4 \rightarrow x^2 = 16$$

maar dit is onjuist:

$$x^2 > 16 \rightarrow x > 4$$

en is dit ook onjuist:

$$x > 4 \leftrightarrow x^2 > 16$$

Als een **stelselvergelijking** is gegeven, dan gelden voor verschillende x-waarden verschillende formules. Als er **absolute waarden** strepen om een term heen staan, dan wil het zeggen dat die term niet negatief mag zijn. Zo geldt voor deze functie:

$$f(x) = |x|$$

het stelsel vergelijkingen:

$$f(x) = x \; als \; x \geq 0$$
$$f(x) = -x \; als \; x < 0$$

Een stelsel vergelijking kan gebruikt worden om aan te geven dat twee lineaire functies allebei moeten gelden. Dan kan je **substitueren** om tot een uitkomst te komen. Dat wil zeggen: je drukt voor de ene vergelijking de ene variabele in de andere uit en substitueert die ene variabele in de andere vergelijking. Als bijvoorbeeld moet gelden:

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

dan:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$
$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

Voorbeeldopgave 22
Los het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$-3x + y = 2$$
$$4x + 2y = 8$$

Eerst drukken we voor vergelijking $-3x + y = 2$ variabele y uit in variabele x. Dat geeft: $y = 3x + 2$. Als we dit substitueren in de vergelijking $4x + 2y = 8$ krijgen we $4x + 2(3x + 2) = 4x + 2 * 3x + 2 * 2 = 4x + 6x + 4 = 10x + 4 = 8$, dus $10x = 4$, dus $x = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Invullen geeft $y = 3x + 2 = 3 * \frac{2}{5} + 2 = \frac{6}{5} + 2 = \frac{16}{5}$.

Het volgende **sommatie-teken** geeft de som weer van $i = j$ tot $i = n$, waarbij je telkens i invult in de formule $f(i)$:

$$\sum_{i=j}^{n} f(i)$$

Voorbeeldopgave 23
Bepaal de volgende som:

$$\sum_{i=5}^{7} i^2$$

We moeten i^2 berekenen voor $i = 5$, $i = 6$ en $i = 7$. Dit is respectievelijk $5^2 = 25$, $6^2 = 36$ en $7^2 = 49$. Nu moeten we de uitkomsten bij elkaar optellen, wat geeft:

$$\sum_{i=5}^{7} i^2 = 5^2 + 6^2 + 7^2 = 25 + 36 + 49 = 110$$

Tot slot kan het van pas komen bij het oplossen van vergelijkingen om aan beide kanten het **logaritme** te nemen, zodat de som gemakkelijker kan worden opgelost.

Voorbeeldopgave 24
Los de volgende vergelijking op: $x^{ln\,(x)\,+8} = \frac{1}{e^{16}}$.

Deze vergelijking is makkelijker op te lossen als we eerst aan beide kanten het logaritme nemen. Dit levert op: $ln\,(x^{ln\,(x)\,+8}) = ln\,(\frac{1}{e^{16}})$. Op basis van de rekenregel $ln\left(x^{a}\right) = a * ln\,(x)$ geldt dat $ln\left(x^{ln\,(x)\,+8}\right) = (ln(x) + 8) * ln(x) = (ln\,(x))^{2} + 8\,ln\,(x)$. Er geldt: $ln\left(\frac{1}{e^{16}}\right) = ln\left(e^{-16}\right) =- 16$, dus $(ln\,(x))^{2} + 8\,ln(x) =- 16$, dus $(ln(x))^{2} + 8\,ln(x) + 16 = 0$. Als we nu nemen $p = ln\,(x)$ hebben we een kwadratische vergelijking van de vorm $p^{2} + bp + c = 0$; in dit geval $p^{2} + 8p + 16 = 0$. Voor ontbinden in factoren moeten we zoeken naar twee getallen die bij elkaar opgeteld 8 en met elkaar vermenigvuldigd 16 zijn. Dit is tweemaal 4, wat ertoe leidt dat $p^{2} + 8p + 16 = (p + 4)(p + 4) = 0$, dus $p + 4 = 0$, dus $p = ln(x) =- 4$, dus $x = e^{-4}$.

Daarnaast moet je kunnen rekenen met **interest**. Stel je hebt momenteel een bedrag van A euro op de bank gezet tegen een rentepercentage r per jaar. Dan geldt dat na t aantal jaren het bedrag bedraagt:

$$A * \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{t}$$

De Netto Contante Waarde (NCW) is het bedrag dat je een t aantal jaren geleden op een bankrekening had moeten zetten tegen een rentepercentage r per jaar om een bedrag van A euro te krijgen. Voor het berekenen van de NCW geldt:

$$\frac{A}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{t}}$$

Tot slot kan ook de afschrijving van activa berekend worden. Als je activa A euro waard zijn en dit per jaar met d afneemt, dan geldt voor de waarde van de activa na t jaren:

$$A * \left(1 - \frac{d}{100}\right)^{t}$$

De **groeifactor** is in alle gevallen gelijk aan hetgeen wat tussen de haakjes staat en waar tot de macht t boven staat.

Voorbeeldopgave 25
Bereken de waarde van activa na 3 jaren met een huidige waarde van een miljoen met $d = 10\%$.

$$A * \left(1 - \frac{d}{100}\right)^{t} = 1000000 * \left(1 - \frac{10}{100}\right)^{3} = 729000$$

H2: Cyclus 1 - Oefenvragen

Oefenvraag 1
Vind de waarden van de volgende uitdrukkingen en schrijf ze zo kort mogelijk op.

a. $\frac{2}{3} + \frac{4}{7} - \frac{14}{9}$
b. $\frac{a}{b} + \frac{a}{b^2} - \frac{c}{b^3}$
c. $\left((x + 2)^2 - 4x - 4\right) * \sqrt[10]{\left(x^4\right)^5}$

Oefenvraag 2
Vind de snijpunten met de assen van de volgende functies:

a. $f(x) = -9x - 27$
b. $f(x) = 4x - 16$
c. $f(x) = x^2 + x + 1$
d. $f(x) = 2x^2 + 8x + 8$

Oefenvraag 3
Vind de nulpunten van de volgende functies:

a. $f(x) = x^2 - 2x - 15$
b. $f(x) = x^4 + 8x^3 + 16x^2$

Oefenvraag 4
Voer de volgende deling uit: $\frac{x^4 - 8x^2}{x-2}$.

Oefenvraag 5
Los de volgende vergelijkingen op:

a. $\sqrt{-3x + 24} = 8$
b. $\sqrt{88x^3} + 30 = 10$
c. $\frac{x^2-9}{(x+3)(x-3)} = 0$
d. $\frac{x^2+8x+15}{(x+4)(x+6)} = 0$
e. $\frac{x}{x+1} + \frac{18}{x^2+5x+4} - \frac{2x}{x+4} = 10$
f. $\frac{8x^2}{-7x^3} = \frac{-\frac{8}{7}x + \frac{288}{7x^3}}{x^2-4}$

Oefenvraag 6
Los de volgende vergelijkingen op:

a. $4^{x^2+10x+20} = 16^{\frac{3}{2}x+4}$
b. $8^{x^2+8x+18} = 4 + ln\left(e^{20}\right) + ln\left(e^{40}\right)$

Oefenvraag 7

Los de volgende ongelijkheid op: $\frac{ln\,(2x)}{x^2-9} < 0.$

Oefenvraag 8

Los de volgende vergelijking op:

$$\sum_{i=1}^{3}(4 - i)x^{i-1} + 11x = \sum_{i=8}^{10} 9\left(1 - (i - 9)^2\right)x^{i-8}$$

Oefenvraag 9

Los de volgende vergelijking op: $x^{\,ln\,(x)\,+4} = \frac{1}{e^4}.$

H3: Cyclus 1 - Antwoorden bij oefenvragen

Oefenvraag 1a

Om breuken bij elkaar op te kunnen tellen of van elkaar af te kunnen trekken, moeten ze gelijknamig zijn. Dat wil zeggen dat ze gelijke noemers moeten hebben. Daarom moet je op zoek gaan naar het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van de noemers, in dit geval 3, 7 en 9. Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud is in dit geval 63. Er geldt dan dat $\frac{2}{3} = \frac{21*2}{21*3} = \frac{42}{63}$, $\frac{4}{7} = \frac{9*4}{9*7} = \frac{36}{63}$ en $\frac{14}{9} = \frac{7*14}{7*9} = \frac{98}{63}$, dus $\frac{2}{3} + \frac{4}{7} - \frac{14}{9} = \frac{42}{63} + \frac{36}{63} - \frac{98}{63} = \frac{42+36-98}{63} = -\frac{20}{63}$.

Oefenvraag 1b

Om breuken bij elkaar op te kunnen tellen of van elkaar af te kunnen trekken, moeten ze gelijknamig zijn. Dat wil zeggen dat ze gelijke noemers moeten hebben. Daarom moet je op zoek gaan naar het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van de noemers, in dit geval b, b^2 en b^3. Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud is in dit geval b^3. Er geldt dan dat $\frac{a}{b} = \frac{b^2*a}{b^2*b} = \frac{ab^2}{b^3}$ en $\frac{a}{b^2} = \frac{b*a}{b*b^2} = \frac{ab}{b^3}$, dus $\frac{a}{b} + \frac{a}{b^2} - \frac{c}{b^3} = \frac{ab^2}{b^3} + \frac{ab}{b^3} - \frac{c}{b^3} = \frac{ab^2+ab-c}{b^3}$.

Oefenvraag 1c

Deze uitdrukking bestaat uit verschillende delen. Om de opgaven op te kunnen lossen moet je deze onderdelen eerst apart uitwerken. Allereerst gaan we de haakjes uitwerken. Hiervoor berekenen we eerst $(x + 2)^2$.

$(x + 2)^2 = (x + 2) * (x + 2) = x * x + x * 2 + 2 * x + 2 * 2 = x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$. Vervolgens geldt dus dat $(x + 2)^2 - 4x - 4 = x^2 + 4x + 4 - 4x - 4 = x^2$. Een rekenregel is dat $\left(a^b\right)^c = a^{b*c} = a^{bc}$, dus $\left(x^4\right)^5 = x^{4*5} = x^{20}$. Een andere rekenregel is dat $a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$, dus $\sqrt[10]{x} = x^{\frac{1}{10}}$. In dit geval geldt dus $\sqrt[10]{\left(x^4\right)^5} = \sqrt[10]{x^{20}} = x^{\frac{20}{10}} = x^2$. Vervolgens geldt dus dat $\left((x + 2)^2 - 4x - 4\right) * \sqrt[10]{\left(x^4\right)^5} = x^2 * x^2 = x^4$ op basis van de rekenregel dat $a^b * a^c = a^{b+c}$.

Oefenvraag 2a

Voor het snijpunt met de y-as geldt dat $x = 0$. Om de y-waarde van het snijpunt met de y-as te bepalen moet je deze waarde van x invullen in de functie $f(x)$. Zo krijg je dan $f(0) = -9 * 0 - 27 = -27$. Hieruit volgt dus dat het snijpunt met de y-as $(0, -27)$ is. Voor het snijpunt met de x-as geldt dat $y = 0$, dus $f(x) = -9x - 27 = 0$. Hieruit volgt dat $-9x = 27$, dus $x = \frac{27}{-9} = -3$. Hieruit volgt dus dat het snijpunt met de x-as $(-3, 0)$ is.

Oefenvraag 2b

Voor het snijpunt met de y-as geldt dat $x = 0$. Om de y-waarde van het snijpunt met de y-as te bepalen moet je deze waarde van x invullen in de functie $f(x)$. Zo krijg je dan $f(0) = 4 * 0 - 16 = -16$. Hieruit volgt dus dat het snijpunt met de y-as $(0, -16)$ is. Voor het snijpunt met de x-as geldt dat $y = 0$, dus $f(x) = 4x - 16 = 0$. Hieruit volgt dat $4x = 16$, dus $x = \frac{16}{4} = 4$. Hieruit volgt dus dat het snijpunt met de x-as $(4, 0)$ is.

Oefenvraag 2c

Voor het snijpunt met de y-as geldt dat $x = 0$. Om de y-waarde van het snijpunt met de y-as te bepalen moet je deze waarde van x invullen in de functie $f(x)$. Zo krijg je dan $f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$. Hieruit volgt dus dat het snijpunt met de y-as $(0, 1)$ is. Voor het snijpunt met de x-as geldt dat $y = 0$. Voor de x-waarden geldt dat $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ of dat $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, als de functie van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ is. Er moet dan echter wel gelden dat $b^2 - 4ac \geq 0$ en dat $a \neq 0$. In dit geval geldt dat $a = 1$, $b = 1$ en $c = 1$. Hieruit volgt dat $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 * 1 * 1 =- 3 < 0$. Dit betekent dat er geen snijpunten met de x-as zijn.

Oefenvraag 2d

Voor het snijpunt met de y-as geldt dat $x = 0$. Om de y-waarde van het snijpunt met de y-as te bepalen moet je deze waarde van x invullen in de functie $f(x)$. Zo krijg je dan $f(0) = 2 * 0^2 + 8 * 0 + 8 = 8$. Hieruit volgt dus dat het snijpunt met de y-as $(0, 8)$ is. Voor het snijpunt met de x-as geldt dat $y = 0$. Voor de x-waarden geldt dat $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ of dat $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, als de functie van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ is. Er moet dan echter wel gelden dat $b^2 - 4ac \geq 0$ en dat $a \neq 0$. In dit geval geldt dat $a = 2$, $b = 8$ en $c = 8$. Hieruit volgt dat $b^2 - 4ac = 8^2 - 4 * 2 * 8 = 0 \geq 0$ en dat $a = 2 \neq 0$. Er geldt dus inderdaad dat $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ of dat $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Invullen geeft $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-8-\sqrt{0}}{2*2} =- 2$. Omdat $b^2 - 4ac = 0$, geldt dus dat $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. . Het snijpunt met de x-as is daarom $(- 2, 0)$.

Oefenvraag 3a

Er wordt in dit geval gevraagd om de vergelijking $x^2 - 2x - 15 = 0$ op te lossen. Dit kan met behulp van de abc-formule, maar dit kan ook aan de hand van de hierna volgende wijze. De vergelijking is van de vorm $x^2 + mx + n = 0$. Voor het bepalen van de nulpunten van de functie $f(x)$, een polynomiale functie van graad 2, geldt dat we de volgende theorie moeten toepassen, namelijk dat als $f(x) = x^2 + mx + n$ dan $f(x) = (x + q)(x + r)$ met als voorwaarden dat
$q + r = m$ en $q * r = n$. We moeten dus twee getallen vinden die bij elkaar opgeteld gelijk zijn aan -2 en vermenigvuldigd met elkaar -15 zijn. Dit zijn de getallen -5 en 3. Hieruit volgt $f(x) = (x - 5)(x + 3)$, wat betekent dat nulpunten zijn: $x = 5$ en $x =- 3$.

Oefenvraag 3b

Er wordt in dit geval gevraagd om de vergelijking $x^4 + 8x^3 + 16x^2 = 0$ op te lossen. Eerst moet gezocht worden naar een factor waarvoor geldt $f(x) = (x - c) * g(x)$, waarbij $f(x)$ in dit geval een polynomiale functie van graad 4 is en dientengevolge $g(x)$ een polynomiale functie van graad 3 is. Door ontbinden in factoren valt te vinden dat $f(x) = x\left(x^3 + 8x^2 + 16x\right) = (x - 0)\left(x^3 + 8x^2 + 16x\right) = 0$. Dit betekent dus dat $x = 0$ sowieso een nulpunt is van de functie $f(x)$. Voor de ontstane functie $g(x) = x^3 + 8x^2 + 16x$ geldt dat deze gelijk moet zijn aan 0, omdat $f(x) = (x - 0)\left(x^3 + 8x^2 + 16x\right) = 0$ van de vorm $A * B = 0$ is, wat betekent dat $A = 0$ of $B = 0$. We hebben al gezien dat geldt dat $x = 0$ als $A = x - 0 = 0$. Voor $B = 0$ geldt $x^3 + 8x^2 + 16x = 0$.

Nu moet gezocht worden naar een factor waarvoor geldt $g(x) = (x - c) * h(x)$, waarbij $g(x)$ in dit geval een polynomiale functie van graad 3 is en dientengevolge $h(x)$ een polynomiale functie van graad 2 is. Door ontbinden in factoren valt te vinden dat $g(x) = x\left(x^2 + 8x + 16\right) = (x - 0)\left(x^2 + 8x + 16\right) = 0$. Dit betekent dus dat $x = 0$ sowieso een nulpunt is van de functie $g(x)$. Voor de ontstane functie $h(x) = x^2 + 8x + 16$ geldt dat deze gelijk moet zijn aan 0, omdat $g(x) = (x - 0)\left(x^2 + 8x + 16\right) = 0$ van de vorm $A * B = 0$ is, wat betekent dat $A = 0$ of $B = 0$. We hebben al gezien dat geldt dat $x = 0$ als $A = x - 0 = 0$. Voor $B = 0$ geldt $x^2 + 8x + 16 = 0$.Dit is van de vorm $x^2 + mx + n = 0$. Voor het bepalen van de nulpunten van de functie $h(x)$, een polynomiale functie van graad 2, geldt dat we de theorie moeten toepassen, namelijk dat als $g(x) = x^2 + mx + n$ dan $g(x) = (x + q)(x + r)$ met als voorwaarden dat $q + r = m$ en $q * r = n$. We moeten dus twee getallen vinden die bij elkaar opgeteld gelijk zijn aan 8 en vermenigvuldigd met elkaar 16 zijn. Dit zijn de getallen 4 en 4. Hieruit volgt $h(x) = (x + 4)(x + 4)$, wat betekent dat het nulpunt van $h(x)$ is: $x = -4$. Dit betekent dat de nulpunten van de functie $f(x)$ zijn: $x = 0$ en $x = -4$

Oefenvraag 4

Eerst wil je x^4 wegkrijgen. Hiervoor moet je $x - 2$ vermenigvuldigen met x^3. Hieruit volgt $x^3 * (x - 2) = x^4 - 2x^3$. Vervolgens trek je $x^4 - 2x^3$ af van $x^4 - 8x^2$, waardoor je $2x^3 - 8x^2$ overhoudt. Nu wil je $2x^3$ wegkrijgen. Hiervoor moet je $x - 2$ vermenigvuldigen met $2x^2$. Hieruit volgt $2x^2 * (x - 2) = 2x^3 - 4x^2$. Vervolgens trek je $2x^3 - 4x^2$ af van $2x^3 - 8x^2$, waardoor je $-4x^2$ overhoudt. Nu wil je $-4x^2$ wegkrijgen. Hiervoor moet je $x - 2$ vermenigvuldigen met $-4x$. Hieruit volgt $-4x * (x - 2) = -4x^2 + 8x$. Vervolgens trek je $-4x^2 + 8x$ af van $-4x^2$, waardoor je $-8x$ overhoudt. Nu wil je $-8x$ wegkrijgen. Hiervoor moet je $x - 2$ vermenigvuldigen met -8. Hieruit volgt $-8 * (x - 2) = -4x + 16$. Vervolgens trek je $-4x + 16$ af van $-4x$, waardoor je -16 overhoudt. Dit is de restterm. Het antwoord is dus: $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 - \frac{16}{x-2}$.

De uitgewerkte staartdeling ziet er als volgt uit:

$x - 2 / x^4 \quad - 8x^2 \quad \backslash = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

$\underline{\quad x^4 - 2x^3} \quad \underline{- (x^3)}$

$2x^3 - 8x^2$

$\underline{2x^3 - 4x^2} \quad \underline{- (2x^2)}$

$- 4x^2$

$\underline{- 4x^2 + 8x} \quad \underline{- (- 4x)}$

$- 8x$

$\underline{- 8x + 16} \quad \underline{- (- 8)}$

$- 16$

Oefenvraag 5a

De vergelijking is van de vorm $\sqrt{A} = b$ met $b \geq 0$. Nu moeten we kwadrateren om de wortel weg te werken. Hieruit volgt dat $- 3x + 24 = 64$. Nu trekken we aan beide kanten 24 af. Dit levert op dat $- 3x = 40$. Delen aan beide kanten door $- 3$ levert op $x = -\frac{40}{3}$.

Oefenvraag 5b

De vergelijking is nog niet van de vorm $\sqrt{A} = b$. Eerst moet de wortel nog geïsoleerd worden.

Dit doen we door aan beide kanten 30 af te trekken. Dit levert op: $\sqrt{88x^3} = - 20$. Dit is van de vorm$\sqrt{A} = b$ alleen geldt niet dat $b \geq 0$. Dit betekent dat de vergelijking geen oplossing heeft.

Oefenvraag 5c

De vergelijking is al van de vorm $\frac{A}{B} = 0$. Dit wil zeggen dat de oplossing is $A = 0$ als $B \neq 0$. Eerst moeten we dus de vergelijking oplossen $x^2 - 9 = 0$. Als we aan beide kanten 9 optellen, levert dit op $x^2 = 9$, wat na worteltrekken leidt tot $x = 3$ of $x = - 3$. Echter mag de noemer niet gelijk aan 0 zijn. Dit betekent dat we de vergelijking $(x + 3)(x - 3) \neq 0$ moeten oplossen. Hieruit volgt $x + 3 \neq 0$ of $x - 3 \neq 0$, wat betekent dat $x \neq - 3$ en $x \neq 3$. De vergelijking kent dus geen oplossingen, aangezien de oplossingen van $A = 0$ hetzelfde zijn als die van $B = 0$.

Oefenvraag 5d

De vergelijking is al van de vorm $\frac{A}{B} = 0$. Dat wil zeggen dat de oplossing is $A = 0$ als $B \neq 0$.

Eerst moeten we dus de vergelijking oplossen $x^2 + 8x + 15 = 0$. Dit kunnen we doen door te ontbinden in factoren. We moeten dus op zoek naar twee getallen die bij elkaar opgeteld 8 zijn en met elkaar vermenigvuldigd 15. Dit zijn de getallen 3 en 5, dus

$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5) = 0$. Dit betekent dat $x + 3 = 0$ of $x + 5 = 0$, wat betekent dat $x =- 3$ en $x =- 5$. Echter mag de noemer niet gelijk aan 0 zijn. Dit betekent dat we de vergelijking $(x + 4)(x + 6) \neq 0$ moeten oplossen. Hieruit volgt $x + 4 \neq 0$ of $x + 6 \neq 0$, wat betekent dat $x \neq - 4$ en $x \neq - 6$. De antwoorden van de vergelijking zijn dus $x = - 3$ en $x = - 5$.

Oefenvraag 5e

De vergelijking is nog niet van de vorm $\frac{A}{B} = 0$. Dit betekent dat we de vergelijking eerst nog in deze vorm moeten schrijven. Hiervoor moeten we eerst aan beide kanten 10 aftrekken. Dit levert op: $\frac{x}{x+1} + \frac{18}{x^2+5x+4} - \frac{2x}{x+4} - 10 = 0$. Nu moeten we de vier breuken als een breuk gaan schrijven. Hiervoor moeten ze echter wel gelijknamig zijn, zodat we ze kunnen optellen en aftrekken. Belangrijk hierbij is om te zien $x^2 + 5x + 4 = (x + 4)(x + 1)$. Dit kan je doen door **ontbinden van factoren**, waarbij je dus zoekt naar twee getallen die bij elkaar opgeteld, in dit geval, 5 zijn en met elkaar vermenigvuldigd 4. In dit geval zijn dat de getallen 4 en 1. Hieruit volgt de vergelijking $\frac{x}{x+1} + \frac{18}{(x+4)(x+1)} - \frac{2x}{x+4} - 10 = 0$. De teller en noemer van de eerste en tweede breuk kunnen we vervolgens vermenigvuldigen met respectievelijk $x + 4$ en $x + 1$. De noemer van de vierde breuk kunnen we vermenigvuldigen met $(x + 4)(x + 1)$. Dit levert op dat $\frac{x*(x+4)}{(x+4)(x+1)} + \frac{18}{(x+4)(x+1)} - \frac{2x*(x+1)}{(x+4)(x+1)} - \frac{10*(x+4)(x+1)}{(x+4)(x+1)} = \frac{x^2+4x}{(x+4)(x+1)} + \frac{18}{(x+4)(x+1)} - \frac{2x^2+2x}{(x+4)(x+1)} - \frac{10x^2+50x+40}{(x+4)(x+1)} = 0$. Dit betekent $\frac{x^2+4x+18-2x^2-2x-10x^2-50x-40}{(x+4)(x+1)} = 0$. Dit levert de vergelijking $\frac{-11x^2-48x-22}{(x+4)(x+1)} = 0$ op. De vergelijking is nu wel van de vorm $\frac{A}{B} = 0$. Dit wil zeggen dat de oplossing is $A = 0$ als $B \neq 0$.

Eerst moeten we dus de vergelijking oplossen $-11x^2 - 48x - 22 = 0$. Dit doen we met behulp van de abc-formule: $a = -11$, $b = -48$ en $c = -22$. Er geldt $b^2 - 4ac \geq 0$ en $a \neq 0$, dus $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ of $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, dus $x = \frac{-24+\sqrt{334}}{11}$ of $x = \frac{-24-\sqrt{334}}{11}$. Echter, de noemer mag niet gelijk aan 0 zijn. Dit betekent dat we de vergelijking $(x + 4)(x + 1) \neq 0$ moeten oplossen.

Hieruit volgt $x + 4 \neq 0$ of $x + 1 \neq 0$, wat betekent dat $x \neq -4$ en $x \neq -1$. Het antwoord van de vergelijking is dus $x = \frac{-24+\sqrt{334}}{11}$ of $x = \frac{-24-\sqrt{334}}{11}$.

Oefenvraag 5f

De vergelijking is al van de vorm $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. Dit wil zeggen dat de oplossing is $AD = BC$ als $B \neq 0$ en $D \neq 0$. Eerst moeten we dus kruislings vermenigvuldigen. Dat levert op $8x^2\left(x^2 - 4\right) = -7x^3\left(-\frac{8}{7}x + \frac{288}{7x^3}\right) = 8x^4 - 32x^2 = 8x^4 - 288$. Aan beide kanten $8x^4$ wegstrepen levert op $-32x^2 = -288$, wat na beide kanten delen door -32 geeft $x^2 = 9$. Na worteltrekken geeft dit als oplossing $x = 3$ of $x = -3$. Echter mogen B en D geen nul zijn. Daarom lossen we de vergelijkingen $-7x^3 \neq 0$ en $x^2 - 4 \neq 0$ op, wat geeft $x \neq 0$ en $x \neq 2$ en $x \neq -2$. Dit geeft als oplossing voor de vergelijking $x = 3$ of $x = -3$.

Oefenvraag 6a

Eerst moeten we de vergelijking naar de vorm $g^a = g^b$ krijgen, zodat geldt $a = b$. Dit kunnen we doen door gebruik te maken van de rekenregels, zoals we deze eerder hebben gezien in het onderwerp over machten. Volgens de rekenregel $g^{a*b} = \left(g^a\right)^b$ geldt dat $16^{\frac{3}{2}x+4} = \left(4^2\right)^{\frac{3}{2}x+4} = 4^{2*\left(\frac{3}{2}x+4\right)} = 4^{3x+8}$. Nu hebben we dus de vergelijking $4^{x^2+10x+20} = 4^{3x+8}$ verkregen. Deze is van de vorm $g^a = g^b$, waardoor geldt $a = b$, ofwel $x^2 + 10x + 20 = 3x + 8$. Dit willen we brengen naar de vorm $x^2 + bx + c = 0$, zodat we kunnen ontbinden in factoren. Het aan beide kanten aftrekken van $3x + 8$ levert op: $x^2 + 7x + 12 = 0$. Nu moeten we dus op zoek naar twee getallen die bij elkaar opgeteld 7 en met elkaar vermenigvuldigd 12 zijn. Dit zijn de getallen 3 en 4, dus $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4) = 0$, dus $(x + 3) = 0$ of $(x + 4) = 0$, wat betekent dat $x = -3$ of $x = -4$.

Oefenvraag 6b

Eerst moeten we de vergelijking naar de vorm $g^a = g^b$ krijgen, zodat geldt $a = b$. Dit kunnen we doen door gebruik te maken van de rekenregels, zoals we deze eerder hebben gezien in het onderwerp over machten. Volgens de rekenregel $ln\,(a) + ln\,(b) = ln\,(ab)$ en de rekenregel $g^a * g^b = g^{a+b}$ geldt $ln\left(e^{20}\right) + ln\left(e^{40}\right) = ln\left(e^{20} * e^{40}\right) = ln\left(e^{60}\right) = 60$, wat betekent dat de term $4 + ln\left(e^{20}\right) + ln\,(e^{40})$ gelijk is aan $4 + 60 = 64$. Om naar de vorm $g^a = g^b$ te komen zullen we 64 moeten schrijven als een macht van 8: $64 = 8^2$, wat betekent dat $8^{x^2+8x+18} = 8^2$, dus $x^2 + 8x + 18 = 2$. Dit levert op: $x^2 + 8x + 16 = 0$. Nu moeten we dus op zoek naar twee getallen die bij elkaar opgeteld 8 en met elkaar vermenigvuldigd 16 zijn. Dit zijn de getallen 4 en 4, dus $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)(x + 4) = 0$, dus $x + 4 = 0$, wat betekent dat $x = -4$.

Oefenvraag 7

Eerst willen we aan een kant van het ongelijkheidsteken 0 krijgen. Dit is reeds het geval. Nu moeten we ervoor zorgen dat er alleen nog maar vermenigvuldigingen en/of delingen staan aan de linkerkant van het ongelijkheidsteken. Dit is ook reeds het geval. Aan de hand hiervan gaan we nu een tekenschema maken:

$$ln\,(2x) = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$
$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3 \text{ of } x = -3$$

x		-3		0		$\frac{1}{2}$		3	
$ln(2x)$	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	–	0	+	+	+
$x^2 - 9$	+	0	–	–	–	–	–	0	+
$\frac{ln\,(2x)}{x^2-9}$	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	+	0	–	N.D.	+

De vergelijking $\frac{ln(2x)}{x^2-9} < 0$ is dus kloppend, als $\frac{1}{2} < x < 3$.

Oefenvraag 8

Er geldt dat $\sum_{i=1}^{3}(4 - i)x^{i-1} = 3 + 2x + x^2$. Daarnaast geldt dat $\sum_{i=8}^{10} 9\left(1 - (i - 9)^2\right)x^{i-8} = 0 + 9x + 0$. Dit betekent dat de vergelijking ook geschreven kan worden als $x^2 + 2x + 3 + 11x = 9x$. Dit betekent dat $x^2 + 4x + 3 = 0$. Voor ontbinden in factoren moeten we op zoek naar twee getallen die bij elkaar opgeteld 4 en met elkaar vermenigvuldigd 3 zijn. Dit zijn de getallen 3 en 1, wat ertoe leidt dat $x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1) = 0$, dus $x + 3 = 0$ of $x + 1 = 0$, dus $x = -3$ of $x = -1$

Oefenvraag 9

Deze vergelijking is makkelijker op te lossen als we eerst aan beide kanten het logaritme nemen. Dit levert op: $ln\,(x^{ln\,(x)\,+4}) = ln\,(\frac{1}{e^4})$. Op basis van de rekenregel $ln\left(x^a\right) = a * ln\,(x)$ geldt dat $ln\left(x^{ln\,(x)\,+4}\right) = (ln(x) + 4) * ln\,(x) = (ln(x))^2 + 4\,ln\,(x)$. Er geldt: $ln\left(\frac{1}{e^4}\right) = ln\left(e^{-4}\right) = -4$, dus $(ln(x))^2 + 4\,ln(x) = -4$, dus $(ln(x))^2 + 4\,ln(x) + 4 = 0$. Als we nu nemen $p = ln\,(x)$ hebben we een kwadratische vergelijking van de vorm $p^2 + bp + c = 0$; in dit geval $p^2 + 4p + 4 = 0$. Voor ontbinden in factoren moeten we op zoek naar twee getallen die bij elkaar opgeteld 4 en met elkaar vermenigvuldigd 4 zijn. Dit is tweemaal 2, wat ertoe leidt dat $p^2 + 4p + 4 = (p + 2)(p + 2) = 0$, dus $p + 2 = 0$, dus $p = ln(x) = -2$, dus $x = e^{-2}$.

Nawoord

Hèhè, het is je gelukt! Je hebt jouw samenvatting uitgelezen.

Wil je meer vertrouwen tanken voor het tentamen? Geen paniek! Wij kunnen je verder helpen in de vorm van handige abonnementen. Met een abonnement ontvang jij de samenvattingen altijd met korting en als eerste in huis! Nieuwsgierig geworden naar een abonnement? Bekijk dan onze website!

Nu 2 MAANDEN GRATIS bij een abonnement!
Wil jij de Slim Academy samenvattingen van jouw vakken altijd als eerste in huis hebben zodat jij op tijd kan beginnen met studeren? Gebruik dan de kortingscode BEGINGOED bij het afsluiten van een abonnement en krijg de eerste twee maanden van jouw abonnement helemaal gratis! Ga hiervoor naar www.slimacademy.nl en kies je jaar. Deze code is geldig t/m 30 september 2022.

Werken bij
Slim Academy is altijd op zoek naar gemotiveerde studenten! Lijkt het je leuk om bij ons aan de slag te gaan met het samenvatten en nakijken van samenvattingen? Dan is de rol van Studieheld zeker iets voor jou. Je kunt **werken vanuit huis**, krijgt een **riante vergoeding** en je hebt een studiegerelateerde bijbaan die **goed op je cv** staat. Heb je interesse? Stuur dan jouw motivatie en cv naar klantenservice@slimacademy.nl.

Kom in contact met Slim Academy
Wil je op de hoogte blijven van de ontwikkelingen bij Slim Academy? Kom in contact via:
www.slimacademy.nl
@SlimAcademy.nl
klantenservice@slimacademy.nl
010 214 32 45

We wensen je veel succes met studeren en het halen van jouw tentamens!

Team Slim Academy